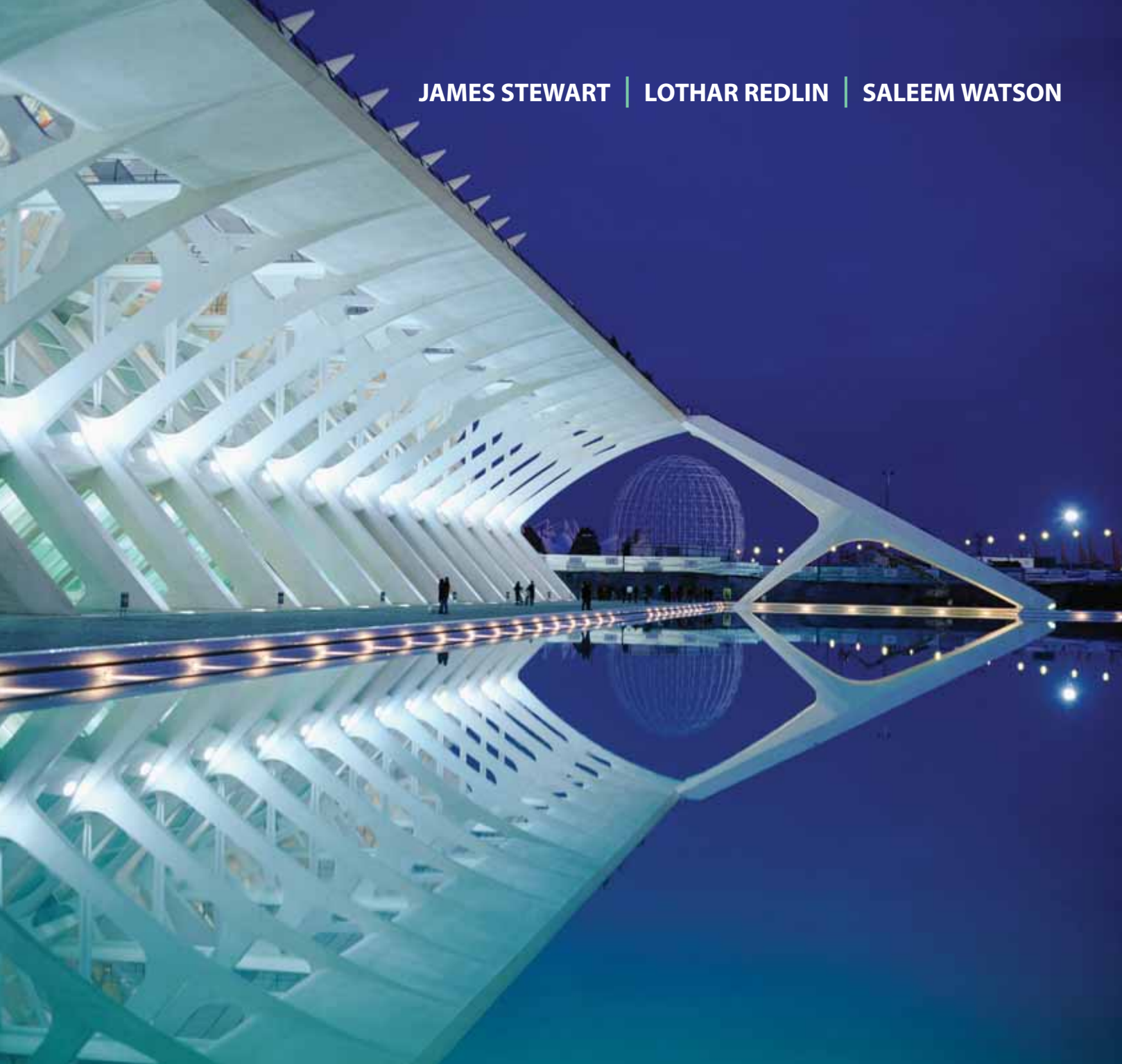


JAMES STEWART | LOTHAR REDLIN | SALEEM WATSON



PRECÁLCULO | 6^e

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

SEXTA EDICIÓN

PRECÁLCULO
MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

PRECÁLCULO

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY AND UNIVERSITY OF TORONTO

LOTHAR REDLIN

THE PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY

SALEEM WATSON

CALIFORNIA STATE UNIVERSITY, LONG BEACH

TRADUCCIÓN:

ING. JORGE HUMBERTO ROMO MUÑOZ

TRADUCTOR PROFESIONAL

REVISIÓN TÉCNICA:

DR. ERNESTO FILIO LÓPEZ

UNIDAD PROFESIONAL EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

M. EN C. MANUEL ROBLES BERNAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



Precálculo. Matemáticas para el cálculo
Sexta Edición

James Stewart/Lothar Redlin y
Saleem Watson

Presidente de Cengage Learning
Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de
Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Gerente editorial para Latinoamérica:
Patricia La Rosa

Gerente de procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Editores:
Sergio R. Cervantes González
Timoteo Eliosa García

Diseño de portada:
Lisa Henry

Imagen de portada:
© Jose Fuste Raga/CORBIS

Composición tipográfica:
Ediciones OVA

© D.R. 2012 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.,
una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning™ es una marca registrada
usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de
este trabajo amparado por la Ley Federal del
Derecho de Autor, podrá ser reproducida,
transmitida, almacenada o utilizada en
cualquier forma o por cualquier medio, ya sea
gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo,
pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado,
reproducción, escaneo, digitalización,
grabación en audio, distribución en Internet,
distribución en redes de información o
almacenamiento y recopilación en sistemas
de información a excepción de lo permitido
en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal
del Derecho de Autor, sin el consentimiento
por escrito de la Editorial.

Traducido del libro
Precalculus. Mathematics for Calculus. Sixth Edition.
Stewart, James/Lothar Redlin y Saleem Watson
Publicado en inglés por Brooks & Cole, una compañía
de Cengage Learning © 2012
ISBN: 978-0-8400-6807-1

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James/Lothar Redlin y Saleem Watson
Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición.
ISBN: 978-607-481-826-0

Visite nuestro sitio en:
<http://latinoamerica.cengage.com>

ACERCA DE LOS AUTORES

JAMES STEWART recibió su maestría de la Universidad de Stanford y su doctorado de la Universidad de Toronto. Realizó una investigación en la Universidad de Londres y fue influenciado por el famoso matemático George Polya en la Universidad de Stanford. Stewart es profesor emérito de la Universidad McMaster y actualmente es profesor de Matemáticas en la Universidad de Toronto. Su campo de investigación es el análisis armónico y las conexiones entre las matemáticas y la música. James Stewart es el autor de una exitosa serie de libros de texto para cálculo publicada por Brooks/Cole, Cengage Learning, incluyendo *Cálculo*, *Cálculo: trascendentes tempranas*, y *Cálculo: conceptos y contextos*; una serie de textos de precálculo, y una serie de libros de texto de matemáticas para secundaria.

LOTHAR REDLIN creció en la isla de Vancouver, recibió una licenciatura en Ciencias de la Universidad de Victoria, y recibió un doctorado de la Universidad de McMaster en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación y docencia en la Universidad de Washington, la Universidad de Waterloo, y la Universidad Estatal de California en Long Beach. En la actualidad es profesor de Matemáticas en la Universidad Estatal de Pennsylvania, en el Campus de Abington. Su campo de investigación es la topología.

SALEEM WATSON recibió su licenciatura en Ciencias de la Universidad Andrews, en Michigan. Realizó estudios de posgrado en la Universidad de Dalhousie y la Universidad de McMaster, donde recibió su doctorado en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Varsovia en Polonia. También enseñó en la Universidad Estatal de Pennsylvania. Actualmente es profesor de Matemáticas en la Universidad Estatal de California, Long Beach. Su campo de investigación es el análisis funcional.

Stewart, Redlin y Watson también han publicado *College Algebra*, *Trigonometry*, *Algebra and Trigonometry*, y (con Phyllis Panman) *College Algebra: Concepts and contexts*.

ACERCA DE LA PORTADA

La fotografía de la portada muestra el Museo de la Ciencia en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia, España, con un planetario en la distancia. Construido de 1991 a 1996, fue diseñado por Santiago Calatrava, arquitecto español. Calatrava siempre ha estado muy interesado en cómo las matemáticas pueden ayudar a materializar los edificios que imagina. Siendo un joven estudiante, él mismo aprendió geometría

descriptiva de los libros con el fin de representar objetos tridimensionales en dos dimensiones. Formado como ingeniero y arquitecto, escribió una tesis doctoral en 1981, titulada "Sobre el doblado de las estructuras espaciales", que está llena de matemáticas, especialmente transformaciones geométricas. Su fortaleza como ingeniero le permite ser atrevido en su arquitectura.

PREFACIO xiii

AL ESTUDIANTE xxi

PRÓLOGO: PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS P1

CAPÍTULO 1 FUNDAMENTOS 1

Descripción del capítulo 1

- 1.1 Números reales 2
- 1.2 Exponentes y radicales 12
- 1.3 Expresiones algebraicas 24
- 1.4 Expresiones racionales 35
- 1.5 Ecuaciones 44
- 1.6 Modelado con ecuaciones 57
- 1.7 Desigualdades 73
- 1.8 Geometría de coordenadas 83
- 1.9 Calculadoras graficadoras; resolución gráfica de ecuaciones y desigualdades 96
- 1.10 Rectas 106
- 1.11 Modelos con el uso de variaciones 118
- Capítulo 1 Repaso 124
- Capítulo 1 Examen 128
- ENFOQUE SOBRE MODELADO Ajuste lineal de datos 130

CAPÍTULO 2 FUNCIONES 141

Descripción del capítulo 141

- 2.1 ¿Qué es una función? 142
- 2.2 Gráficas de funciones 152
- 2.3 Información a partir de la gráfica de una función 163
- 2.4 Rapidez de cambio promedio de una función 172
- 2.5 Transformaciones de funciones 179
- 2.6 Combinación de funciones 190
- 2.7 Funciones uno a uno y sus inversas 199
- Capítulo 2 Repaso 207
- Capítulo 2 Examen 211
- ENFOQUE SOBRE MODELADO Modelado con funciones 213

CAPÍTULO 3	FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES	223
	Descripción del capítulo	223
3.1	Funciones y modelos cuadráticos	224
3.2	Funciones polinomiales y sus gráficas	232
3.3	División de polinomios	246
3.4	Ceros reales de funciones polinomiales	253
3.5	Números complejos	264
3.6	Ceros complejos y el Teorema Fundamental de Álgebra	269
3.7	Funciones racionales	277
	Capítulo 3 Repaso	292
	Capítulo 3 Examen	295
■	ENFOQUE SOBRE MODELADO Ajuste de datos a curvas con funciones polinomiales	296
CAPÍTULO 4	FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS	301
	Descripción del capítulo	301
4.1	Funciones exponenciales	302
4.2	La función exponencial natural	310
4.3	Funciones logarítmicas	315
4.4	Leyes de logaritmos	325
4.5	Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	331
4.6	Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas	340
	Capítulo 4 Repaso	353
	Capítulo 4 Examen	356
■	ENFOQUE SOBRE MODELADO Ajuste de datos a curvas exponenciales y potencia	357
	Examen acumulativo de repaso: capítulos 2, 3 y 4	367
CAPÍTULO 5	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DE LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA	369
	Descripción del capítulo	369
5.1	La circunferencia unitaria	370
5.2	Funciones trigonométricas de números reales	377
5.3	Gráficas trigonométricas	386
5.4	Más gráficas trigonométricas	399
5.5	Funciones trigonométricas inversas y sus gráficas	406
5.6	Modelado de movimiento armónico	412
	Capítulo 5 Repaso	423
	Capítulo 5 Examen	426
■	ENFOQUE SOBRE MODELADO Ajuste de datos a curvas senoidales	427

CAPÍTULO 6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO 433

Descripción del capítulo 433

- 6.1 Medida de un ángulo 434
- 6.2 Trigonometría de triángulos rectángulos 443
- 6.3 Funciones trigonométricas de ángulos 451
- 6.4 Funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos 462
- 6.5 La Ley de Senos 469
- 6.6 La Ley de Cosenos 476
- Capítulo 6 Repaso 483
- Capítulo 6 Examen 487
- ENFOQUE SOBRE MODELADO Topografía 489

CAPÍTULO 7 TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA 493

Descripción del capítulo 493

- 7.1 Identidades trigonométricas 494
- 7.2 Fórmulas de adición y sustracción 500
- 7.3 Fórmulas de ángulo doble, semiángulo y producto a suma 507
- 7.4 Ecuaciones trigonométricas básicas 517
- 7.5 Más ecuaciones trigonométricas 524
- Capítulo 7 Repaso 530
- Capítulo 7 Examen 532
- ENFOQUE SOBRE MODELADO Ondas viajeras y estacionarias 533
- Examen acumulativo de repaso: capítulos 5, 6 y 7 538**

CAPÍTULO 8 COORDENADAS POLARES Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS 541

Descripción del capítulo 541

- 8.1 Coordenadas polares 542
- 8.2 Gráficas de ecuaciones polares 547
- 8.3 Forma polar de números complejos: Teorema de De Moivre 555
- 8.4 Curvas planas y ecuaciones paramétricas 564
- Capítulo 8 Repaso 572
- Capítulo 8 Examen 574
- ENFOQUE SOBRE MODELADO La trayectoria de un proyectil 575

CAPÍTULO 9 VECTORES EN DOS Y TRES DIMENSIONES 579

Descripción del capítulo 579

- 9.1 Vectores en dos dimensiones 580
- 9.2 El producto punto 589

- 9.3 Geometría de coordenadas en tres dimensiones 597
- 9.4 Vectores en tres dimensiones 603
- 9.5 El producto cruz 610
- 9.6 Ecuaciones de rectas y planos 616
- Capítulo 9 Repaso 620
- Capítulo 9 Examen 623
- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Campos vectoriales 624
- Examen acumulativo de repaso: capítulos 8 y 9 628**

CAPÍTULO 10 SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES 629

Descripción del capítulo 629

- 10.1 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 630
- 10.2 Sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas 640
- 10.3 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales 649
- 10.4 El álgebra de matrices 661
- 10.5 Inversas de matrices y ecuaciones matriciales 672
- 10.6 Determinantes y Regla de Cramer 682
- 10.7 Fracciones parciales 693
- 10.8 Sistemas de ecuaciones no lineales 698
- 10.9 Sistemas de desigualdades 703
- Capítulo 10 Repaso 710
- Capítulo 10 Examen 714
- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Programación lineal 716

CAPÍTULO 11 SECCIONES CÓNICAS 723

Descripción del capítulo 723

- 11.1 Parábolas 724
- 11.2 Elipses 732
- 11.3 Hipérbolas 741
- 11.4 Cónicas desplazadas 750
- 11.5 Rotación de ejes 757
- 11.6 Ecuaciones polares de cónicas 765
- Capítulo 11 Repaso 772
- Capítulo 11 Examen 775
- **ENFOQUE SOBRE MODELADO** Cónicas en arquitectura 776
- Examen acumulativo de repaso: capítulos 10 y 11 780**

CAPÍTULO 12 SUCESIONES Y SERIES 783

Descripción del capítulo 783

- 12.1 Sucesiones y notación de suma 784

12.2	Sucesiones aritméticas	794
12.3	Sucesiones geométricas	800
12.4	Matemáticas de finanzas	808
12.5	Inducción matemática	814
12.6	El Teorema del Binomio	820
	Capítulo 12 Repaso	829
	Capítulo 12 Examen	832
■	ENFOQUE SOBRE MODELADO Modelado con sucesiones recursivas	833

CAPÍTULO 13 LÍMITES: UNA MIRADA PREVIA AL CÁLCULO 839

Descripción del capítulo 839

13.1	Hallar límites numérica y gráficamente	840
13.2	Hallar límites algebraicamente	848
13.3	Rectas tangentes y derivadas	856
13.4	Límites en el infinito; límites de sucesiones	865
13.5	Áreas	872
	Capítulo 13 Repaso	881
	Capítulo 13 Examen	883
■	ENFOQUE SOBRE MODELADO Interpretaciones de área	884

Examen acumulativo de repaso: capítulos 12 y 13 888

APÉNDICE: Cálculos y cifras significativas 889

RESPUESTAS R1

ÍNDICE I1

¿Qué necesitan saber realmente los estudiantes para estar preparados para el cálculo? ¿Qué herramientas necesitan realmente los profesores para ayudar a sus alumnos a prepararse para el cálculo? Estas dos preguntas han motivado la escritura de este libro.

Para estar preparado para el cálculo, un estudiante necesita no sólo de conocimientos técnicos sino también de una clara comprensión de conceptos. De hecho, la *comprensión conceptual* y los *conocimientos técnicos* van de la mano y se refuerzan entre sí. Un estudiante también necesita valorar el poder y la utilidad de las matemáticas para *modelar* el mundo real. Todos los temas de este libro de texto están destinados a promover estos objetivos.

Al escribir esta Sexta Edición, nuestro propósito es mejorar aún más la utilidad del libro como herramienta de instrucción para profesores y como herramienta de aprendizaje para estudiantes. Hay varios cambios importantes en esta edición, incluyendo una reestructuración de cada uno de los conjuntos de ejercicios para alinear mejor los ejercicios con los ejemplos de cada sección. En esta sección cada conjunto de ejercicios empieza con *Ejercicios conceptuales*, que estimulan a estudiantes a trabajar con conceptos básicos y usar apropiadamente vocabulario matemático. Varios capítulos han sido reorganizados y reescritos (como se describe a continuación) para enfocar más la exposición en los conceptos principales; hemos agregado un nuevo capítulo sobre vectores en dos y tres dimensiones. En todos estos cambios, así como en otros muchos (pequeños y grandes), hemos retenido el contenido principal que ha contribuido al éxito de este libro.

Nuevo en la Sexta Edición

- **Ejercicios** Más del 20% de los Ejercicios son nuevos. Esto incluye nuevos Ejercicios conceptuales y nuevos ejercicios *Acumulativos de repaso*. Los ejercicios clave están vinculados a ejemplos en el texto.
- **Sitio web acompañante del libro** Un nuevo sitio web www.stewartmath.com contiene *Proyectos de descubrimiento* para cada capítulo y secciones de *Enfoque en la solución de problemas*, que destacan diferentes principios para resolución de problemas compendiados en el Prólogo.
- **CAPÍTULO 2 Funciones** Este capítulo ha sido reescrito por completo para enfocarse con más precisión en el concepto fundamental y de importancia esencial de *función*. El material sobre funciones cuadráticas, que ya estaba antes en este capítulo, ahora es parte del capítulo sobre funciones polinomiales.
- **CAPÍTULO 3 Funciones polinomiales y racionales** Este capítulo ahora empieza con una sección sobre funciones cuadráticas, lo que lleva a un más alto grado de funciones con polinomios.
- **CAPÍTULO 4 Funciones exponenciales y logarítmicas** El material sobre la función exponencial natural está ahora en una sección por separado.
- **CAPÍTULO 5 Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria** Este capítulo incluye una nueva sección sobre funciones trigonométricas inversas y sus gráficas. La introducción de este tema aquí refuerza el concepto de función en el contexto de trigonometría.

- **CAPÍTULO 6 Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo** Este capítulo incluye una nueva sección sobre funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos (Sección 6.4) que es necesaria para aplicar las Leyes de Senos y Cosenos en la siguiente sección, así como para resolver ecuaciones trigonométricas en el Capítulo 7.
- **CAPÍTULO 7 Trigonometría analítica** Este capítulo ha sido modificado completamente. Hay dos nuevas secciones sobre ecuaciones trigonométricas (Secciones 7.4 y 7.5). El material acerca de este tema (antes en la Sección 7.5) ha sido expandido y modificado.
- **CAPÍTULO 8 Coordenadas polares y ecuaciones paramétricas** Este capítulo está ahora enfocado con más precisión en el concepto de un sistema de coordenadas. La sección sobre ecuaciones paramétricas es nuevo para este capítulo. El material sobre vectores está ahora en su propio capítulo.
- **CAPÍTULO 9 Vectores en dos y tres dimensiones** Éste es un nuevo capítulo con una nueva sección de *Enfoque sobre modelado*.
- **CAPÍTULO 10 Sistemas de ecuaciones y desigualdades** El material acerca de sistemas de ecuaciones no lineales está ahora en una sección por separado.
- **CAPÍTULO 11 Secciones cónicas** Este capítulo está ahora más estrechamente dedicado al tema de geometría analítica, en especial a las secciones cónicas; la sección sobre ecuaciones paramétricas se ha cambiado al Capítulo 8.

Enseñanza con la ayuda de este libro

Estamos profundamente conscientes de que la buena enseñanza se presenta en muchas formas, y que hay numerosos métodos diferentes para enseñar los conceptos y conocimientos de precálculo. La organización de los temas de este libro está diseñada para contener diferentes estilos de enseñanza. Por ejemplo, los capítulos de trigonometría han sido organizados de modo que el método de circunferencia unitaria o el de triángulo rectángulo se pueden impartir primero. A continuación veamos otros aspectos especiales que se pueden usar para complementar diferentes estilos de enseñanza:

CONJUNTOS DE EJERCICIOS La forma más importante de animar la comprensión conceptual y perfeccionar los conocimientos técnicos es a través de los problemas que el profesor asigna. Con este fin hemos incluido una amplia selección de ejercicios.

- **Ejercicios de concepto** Estos ejercicios piden al estudiante use lenguaje matemático para expresar datos fundamentales acerca de temas de cada sección.
- **Ejercicios de conocimientos** Cada conjunto de ejercicios está cuidadosamente clasificado, avanzando desde ejercicios básicos para desarrollo de conocimientos hasta problemas más difíciles que requieren síntesis de material previamente aprendido con nuevos conceptos.
- **Ejercicios de aplicaciones** Hemos incluido innumerables problemas aplicados que pensamos captarán el interés de estudiantes.
- **Aprendizaje por descubrimiento, escritura y en grupo** Cada conjunto de ejercicios termina con un bloque de ejercicios llamado *Descubrimiento* ▪ *Discusión* ▪ *Redacción*. Estos ejercicios están diseñados para estimular al estudiante a experimentar, de preferencia en grupos, con los conceptos desarrollados en la sección y luego escribir acerca de lo que hayan aprendido, más que sólo ver la respuesta.
- **Ahora intente hacer el ejercicio...** Al final de cada ejemplo en el texto, el estudiante es dirigido a un ejercicio similar en la sección que ayuda a reforzar los conceptos y conocimientos desarrollados en ese ejemplo (vea, por ejemplo, la página 4).
- **Verifique su respuesta** Los estudiantes son animados a comprobar si la respuesta que obtuvieron es razonable. Esto se destaca en todo el texto en numerosas secciones de notas marginales llamadas *Verifique su respuesta*, que acompañan a los ejemplos. (Vea, por ejemplo, la página 52).


UN CAPÍTULO COMPLETO DE REPASO Hemos incluido un extenso capítulo de repaso principalmente como referencia práctica para los conceptos básicos que son preliminares a este curso.

- **Capítulo 1** Éste es el capítulo de repaso; contiene los conceptos fundamentales de álgebra y geometría analítica que un estudiante necesita para iniciar un curso de pre-cálculo. Es necesario todo lo que en clase pueda estudiarse de este capítulo, dependiendo de la experiencia de los estudiantes.
- **Examen del Capítulo 1** El examen del Capítulo 1 está diseñado como examen de diagnóstico para determinar qué partes de este capítulo de repaso tiene que enseñarse. También sirve para ayudar a estudiantes a medir exactamente qué temas necesitan repasar.

MÉTODO FLEXIBLE A LA TRIGONOMETRÍA Los capítulos de trigonometría de este texto han sido escritos de modo que se puedan enseñar en primer término ya sea el método del triángulo rectángulo o de la circunferencia unitaria. Poniendo estos dos métodos en capítulos diferentes, cada uno con sus amplificaciones relevantes, ayuda a aclarar el propósito de cada uno de estos métodos. Los capítulos que introducen la trigonometría son como sigue:

- **Capítulo 5 Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria** Este capítulo introduce la trigonometría por el método de la circunferencia unitaria, mismo que resalta el hecho de que las funciones trigonométricas son de números reales, igual que las funciones polinomiales y exponenciales con las que los estudiantes están más familiarizados.
- **Capítulo 6 Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo** Este capítulo introduce la trigonometría por el método del triángulo rectángulo, que tiene como base un curso convencional en trigonometría de preparatoria.

Otra forma de enseñar trigonometría es entrelazar los dos métodos. Algunos profesores imparten este material en el siguiente orden: Secciones 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 6.4, 6.5 y 6.6. Nuestra organización facilita hacer esto sin ocultar el hecho de que los dos métodos contienen distintas representaciones de las mismas funciones.

COMPUTADORAS Y CALCULADORAS GRAFICADORAS Hacemos uso de computadoras y calculadoras graficadoras en ejemplos y ejercicios en todo el libro. Nuestros ejemplos orientados a calculadoras están siempre precedidos por ejemplos en los que los estudiantes deben graficar o calcular manualmente, por lo que pueden entender con precisión lo que hace la calculadora cuando más adelante la usan para simplificar la rutina, parte mecánica de su trabajo. Las secciones, subsecciones, ejemplos y ejercicios referentes a calculadoras graficadoras, todos ellos marcados con el símbolo especial , son opcionales y pueden ser omitidos sin pérdida de continuidad. Usamos las siguientes funciones de la calculadora.

- **Gráficas, regresión, álgebra de matrices** Las funciones de la calculadora graficadora se usan en todo el texto para graficar y analizar funciones, familias de funciones y sucesiones; para calcular y graficar curvas de regresión; para ejecutar álgebra de matrices; para graficar desigualdades lineales; y otros poderosos usos.
- **Programas sencillos** Explotamos las funciones de programación de una calculadora graficadora para simular situaciones reales, para sumar series o para calcular los términos de una sucesión periódica. (Vea, por ejemplo, páginas 787 y 791.)

ENFOQUE SOBRE MODELADO El tema del “modelado” se ha utilizado en todo el libro para unificar y aclarar las numerosas aplicaciones de pre-cálculo. Hemos hecho un gran esfuerzo para aclarar los procesos esenciales de traducir problemas del inglés al lenguaje de matemáticas (vea páginas 214 y 636).

- **Construcción de modelos** Hay numerosos problemas aplicados en todo el libro, en donde al estudiante se le da un modelo a analizar (vea, por ejemplo, página 228). Pero el material sobre modelado, en el que al estudiante se le pide *construir* modelos matemáticos, ha sido organizado en secciones y subsecciones claramente definidas (vea, por ejemplo, páginas 213, 340 y 427).
- **Enfoque sobre modelado** Cada capítulo concluye con una sección de *Enfoque sobre modelado*. La primera de estas secciones, después del Capítulo 1, introduce la idea básica del modelado de una situación real al ajustar rectas a datos (regresión lineal). Otras secciones presentan formas en las que sistemas de desigualdades y funciones con polinomios, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas se usan para modelar fenómenos familiares de ciencias y de la vida real (vea, por ejemplo, páginas 296, 357 y 427).

SITIO WEB ACOMPAÑANTE DEL LIBRO Un sitio web que acompaña a este libro se puede ver en www.stewartmath.com. El sitio incluye numerosas fuentes útiles para enseñar precálculo, incluyendo lo siguiente:

- **Proyectos de descubrimiento** Los *Proyectos de descubrimiento* para cada capítulo se encuentran en el sitio web. Cada proyecto contiene un conjunto de actividades difíciles pero accesibles que hace posible que los estudiantes (quizá trabajando en grupos) exploren a mayor profundidad un interesante aspecto del tema que acaban de aprender. (Vea, por ejemplo, los Proyectos de descubrimiento *Visualizar una fórmula*, *Relaciones y funciones*, *¿Sobrevivirá la especie?* y *Gráficas por computadora I y II*.)
- **Enfoque en la solución de problemas** En el sitio web se encuentran varias secciones de *Enfoque en la solución de problemas*, cada una de las cuales destaca uno de los principios para resolver problemas que se introduce en el Prólogo e incluye varios problemas con grado de dificultad. (Vea, por ejemplo, *Reconocer patrones*, *Uso de analogía*, *Introducción de algo extra*, *Tomar casos y Trabajar a la inversa*.)

VIÑETAS MATEMÁTICAS En todo el libro hacemos uso de los márgenes para presentar notas históricas, ideas clave o aplicaciones de matemáticas en el mundo moderno. Éstas sirven para avivar el material y demostrar que las matemáticas son una actividad importante, vital, y que aun a este nivel elemental es fundamental para la vida diaria.

- **Viñetas matemáticas** Estas viñetas incluyen biografías de interesantes matemáticos y a veces incluyen una idea clave que el matemático descubrió y que es relevante para el precálculo. (Vea, por ejemplo, las viñetas de Viète, página 49; Salt Lake City, página 84; y datación por radiocarbono, página 333).
- **Las matemáticas en el mundo moderno** Ésta es una serie de viñetas que destaca el papel central de las matemáticas en los actuales avances en tecnología y las ciencias (vea páginas 283, 700 y 759, por ejemplo).

SECCIONES DE REPASO Y EXÁMENES DE CAPÍTULO Cada capítulo termina con una extensa sección de repaso que incluye lo siguiente

- **Verificación de conceptos** La *Verificación de conceptos* al final de cada capítulo está diseñada para hacer que los estudiantes piensen, y expliquen con sus propias palabras, las ideas presentadas en el capítulo. Éstas se pueden usar como ejercicios de escritura, en una situación de discusión en clase, o para estudio personal.
- **Ejercicios de repaso** Los *Ejercicios de repaso*, al final de cada capítulo, recapitulan los conceptos y conocimientos básicos e incluyen ejercicios que combinan las diferentes ideas aprendidas en el capítulo.
- **Examen de capítulo** Las secciones de repaso concluyen con un *Examen de capítulo* diseñado para ayudar a estudiantes a medir su avance.
- **Exámenes acumulativos de repaso** Los *Exámenes acumulativos de repaso*, que siguen a los capítulos 4, 7, 9, 11 y 13, combinan conocimientos y conceptos de los capítulos precedentes y están diseñados para destacar las conexiones entre los temas de estos capítulos relacionados.
- **Respuestas** Al final de este libro se dan breves respuestas a ejercicios de número impar en cada sección (incluyendo los ejercicios de repaso), y a todas las preguntas de los Ejercicios de conceptos y Exámenes de capítulo.

Reconocimientos

Agradecemos a los siguientes revisores sus cuidadosos y constructivos comentarios.

REVISORES PARA LA QUINTA EDICIÓN Kenneth Berg, University of Maryland; Elizabeth Bowman, University of Alabama at Huntsville; William Cherry, University of North Texas; Barbara Cortzen, DePaul University; Gerry Fitch, Louisiana State University; Lana Grishchenko, Cal Poly State University, San Luis Obispo; Bryce Jenkins, Cal Poly State University, San Luis Obispo; Margaret Mary Jones, Rutgers University; Victoria Kauffman, University of New Mexico; Sharon Keener, Georgia Perimeter College; YongHee Kim-Park,

California State University Long Beach; Mangala Kothari, Rutgers University; Andre Mathurin, Bellarmine College Prep; Donald Robertson, Olympic College; Jude Socrates, Pasadena City College; Enefiok Umana, Georgia Perimeter College; Michele Wallace, Washington State University; y Linda Waymire, Daytona Beach Community College.

REVISORES PARA LA SEXTA EDICIÓN Raji Baradwaj, UMBC; Chris Herman, Lorain County Community College; Irina Kloumova, Sacramento City College; Jim McCleery, Skagit Valley College, Whidbey Island Campus; Sally S. Shao, Cleveland State University; David Slutzky, Gainesville State College; Edward Stumpf, Central Carolina Community College; Ricardo Teixeira, University of Texas at Austin; Taixi Xu, Southern Polytechnic State University; y Anna Wlodarczyk, Florida International University.

Agradecemos a nuestros colegas que continuamente comparten con nosotros sus ideas para enseñar matemáticas. En especial, agradecemos a Andrew Bulman-Fleming por escribir la Guía de estudio y el Manual de soluciones, y a Doug Shaw de la Universidad de Northern Iowa por escribir la Guía del profesor.

Agradecemos a Martha Emry, nuestra editora de arte y servicio de producción; su energía, dedicación, devoción, experiencia e inteligencia fueron componentes esenciales en la creación de este libro. Agradecemos a Barbara Willette, nuestra editora de ejemplares, por su atención a todo detalle del manuscrito. Agradecemos a Jade Myers y su personal de Matrix Art Services por sus atractivas y precisas gráficas, y a Precision Graphics por dar vida a nuestras ilustraciones. Agradecemos a nuestra diseñadora Lisa Henry por el elegante y apropiado diseño para el interior del libro.

En Brooks/Cole especialmente agradecemos a Stacy Green, editora de desarrollo, por guiar y facilitar todo aspecto de la producción de este libro. De entre el personal de Brooks/Cole que intervinieron en este proyecto, particularmente agradecemos a los siguientes: Jennifer Risdén, gerente de proyecto del contenido; Cynthia Ashton, editora asistente; Lynh Pham, editora de medios; Vernon Boes, director de arte; y Myriah Fitzgibbon, gerente de mercadotecnia. Todos ellos hicieron un excelente trabajo.

Otras numerosas personas intervinieron en la producción de este libro, incluyendo editores de permisos, investigadores de fotografía, diseñadores de texto, tipógrafos, expertos en composición, lectores de pruebas, impresores y muchos más. Les agradecemos a todos.

Sobre todo, agradecemos a nuestro editor Gary Whalen. Su vasta experiencia editorial, su extenso conocimiento de problemas actuales en la enseñanza de matemáticas y en especial su profundo interés en libros de matemáticas, han sido recursos de gran valor en la escritura de este libro.

RECURSOS PARA EL PROFESOR

Impresos

Complete Solution Manual (Manual de soluciones completas)

ISBN-10: 0-8400-6880-8; ISBN-13: 978-0-8400-6880-4

El manual de soluciones completas contiene soluciones resueltas de todos los problemas del texto.

Instructor's Guide (Guía del profesor)

ISBN-10: 0-8400-6883-2; ISBN-13: 978-0-8400-6883-5

Doug Shaw, autor de las Guías para el profesor para los ampliamente empleados libros de texto de cálculo de Stewart, escribió este útil acompañante de enseñanza. Contiene puntos a subrayar, tiempo sugerido a asignar, temas de discusión del texto, materiales medulares para clases, sugerencias taller/discusión, ejercicios de trabajo en grupo en una forma apropiada para información, soluciones para ejercicios de trabajo en grupo, y sugirió problemas de tarea.

Medios

Enhanced WebAssign (TareaWeb mejorada)

ISBN-10: 0-538-73810-3; ISBN-13: 978-0-538-73810-1

Exclusivamente de Cengage Learning, Enhanced WebAssign ofrece un extenso programa en línea para Precálculo, para estimular la práctica que es tan crítica para conocer a fondo los conceptos. La pedagogía meticulosamente trazada y los ejercicios de este texto son incluso más eficientes en este Enhanced WebAssign, suplementado por material didáctico de multimedia e inmediata retroalimentación cuando el estudiante complete sus tareas. Los problemas de algoritmos permiten dejar como tarea versiones individuales para cada estudiante. El artículo Practice Another Version (Practique otra versión, activado a discreción) permite que el estudiante aborde las preguntas con nuevos conjuntos de valores hasta que sienta confianza suficiente para trabajar el problema original. Los estudiantes se benefician de un nuevo Premium eBook que contiene artículos de investigación y de énfasis; Personal Study Plans (Planes de Estudio Personal, basados en preguntas de diagnóstico) que identifican temas de capítulo que será necesario dominar; y vínculos para soluciones de video, materiales didácticos interactivos y hasta ayuda en línea, en vivo.

ExamView Computerized Testing (Examen computarizado ExamView)

El software de exámenes ExamView® permite rápidamente a profesores crear, entregar y personalizar exámenes para sus grupos, en formatos impresos o en línea, y permite calificaciones automáticas. Incluye un banco de exámenes con cientos de preguntas personalizadas directamente al texto. ExamView está disponible dentro del CD-ROM PowerLecture.

Solution Builder www.cengage.com/solutionbuilder

Esta base de datos en línea para el profesor ofrece soluciones trabajadas completas a todos los ejercicios del texto, permitiéndole crear impresiones de soluciones seguras, personalizadas (en formato PDF) comparadas exactamente a los problemas que asigne en clase.

PowerLecture con ExamView

ISBN-10: 0-8400-6901-4; ISBN-13: 978-0-8400-6901-6

Este CD-ROM dota al profesor con herramientas dinámicas de medios para la enseñanza. Crea, entrega y personaliza exámenes (impresos o en línea) en minutos con ExamView Computerized Testing Featuring Algorithmic Equations. Construya fácilmente conjuntos de solución para tarea o exámenes usando el manual de soluciones en línea Solution Builder's. Las transparencias y figuras Microsoft PowerPoint del libro también están incluidas en este CD-ROM.

RECURSOS PARA EL ESTUDIANTE

Impresos

Student Solution Manual (Manual de soluciones para el estudiante)

ISBN-10: 0-8400-6879-4; ISBN-13: 978-0-8400-6879-8

Contiene soluciones completamente resueltas para todos los ejercicios de número impar del texto, lo que da a estudiantes una forma de verificar sus respuestas y asegurar que tomaron los pasos correctos para llegar a una respuesta.

Study Guide (Guía de estudio)

ISBN-10: 0-8400-6917-0; ISBN-13: 978-0-8400-6917-7

Este cuidadosamente trazado recurso de aprendizaje ayuda a estudiantes a perfeccionar sus técnicas para resolver problemas, al tiempo que refuerza la comprensión con explicaciones detalladas, ejemplos resueltos y problemas de práctica. Los estudiantes también hallarán listas de las ideas clave a conocer a fondo. Cada sección del texto principal tiene una sección correspondiente en la Guía de estudio.

Medios

Enhanced WebAssign ISBN-10: 0-538-73810-3; ISBN-13: 978-0-538-73810-1

Exclusivamente de Cengage Learning, Enhanced WebAssign® ofrece un extenso programa en línea para Precálculo para estimular la práctica que es tan crítica para conocer a fondo los conceptos. El estudiante recibirá apoyo didáctico de multimedia cuando complete sus tareas. También se beneficiará del nuevo Premium eBook que contiene artículos de investigación y de énfasis; Personal Study Plans (Planes de estudio personal, basados en preguntas de diagnóstico) que identifican temas de capítulo que será necesario dominar; y vínculos para soluciones de video, materiales didácticos interactivos y hasta ayuda en línea, en vivo.

Book Companion Website

Un nuevo sitio web www.stewartmath.com contiene secciones *Discovery Projects* (Proyectos de descubrimiento) para cada capítulo y *Focus on Problem Solving* que destacan diferentes principios para solución de problemas compendiados en el Prólogo.

CengageBrain.com

Visite www.cengagebrain.com para acceso a materiales adicionales para el curso y otros recursos acompañantes. En la página inicial de CengageBrain.com, busque el ISBN de su título (de la tapa posterior de su libro) usando la caja de búsqueda en la parte superior de la página. Esto le llevará a la página del producto en donde pueden hallarse los recursos acompañantes gratuitos.

Text-Specific DVDs ISBN-10: 0-8400-6882-4; ISBN-13: 978-0-8400-6882-8


Los Text-Specific DVDs incluyen nuevos videos de exposición en clase basados en objetivos de aprendizaje. Estos DVD dan una cobertura completa del curso, junto con explicaciones adicionales de conceptos, problemas de muestra y aplicaciones, que ayudan a estudiantes a repasar temas esenciales.

Este libro de texto ha sido escrito para usted como guía para que conozca a fondo las matemáticas del precálculo. A continuación veamos algunas sugerencias para ayudarle a sacar el máximo provecho de su curso.

Antes que nada, debe leer la sección apropiada de texto *antes* de intentar resolver sus problemas de tarea. Leer un texto de matemáticas es muy diferente a leer una novela, un periódico o hasta otro libro. Puede que tenga que releer un pasaje varias veces antes de entenderlo. Ponga especial atención a los ejemplos y resuélvalos usted con lápiz y papel a medida que los lea y, a continuación, haga los ejercicios relacionados mencionados en “*Ahora intente hacer el ejercicio...*” del final de cada ejemplo. Con esta clase de preparación podrá hacer su tarea con mucha mayor rapidez y mejor entendimiento.

No cometa el error de tratar de memorizar cada una de las reglas o dato que se encuentre. Las matemáticas no son simplemente memorización, sino que son el *arte de resolver problemas*, no sólo un conjunto de datos. Para conocer a fondo el tema, usted debe resolver problemas, muchos problemas; haga tantos como pueda. Asegúrese de escribir sus soluciones en una forma lógica, paso a paso. No se rinda ante un problema si no puede resolverlo en seguida. Trate de entender el problema más claramente, vuelva a leerlo por completo y relaciónelo con lo que ya haya aprendido de su profesor y de los ejemplos del texto. Luche con el problema hasta que lo resuelva; una vez que haya hecho esto unas cuantas veces, empezará a entender de lo que se tratan las matemáticas.

Las respuestas a ejercicios de número impar, así como todas las respuestas al examen de cada capítulo, aparecen al final del libro. Si su respuesta difiere de la dada, no suponga de inmediato que usted está en error. Puede ser un cálculo que enlace las dos respuestas y ambas sean correctas. Por ejemplo, si usted obtiene $1/(\sqrt{2} - 1)$ pero la respuesta dada es $1 + \sqrt{2}$, la respuesta de usted *es* correcta porque puede multiplicar el numerador y denominador de su respuesta por $\sqrt{2} + 1$ para cambiarla a la respuesta dada. Al redondear respuestas aproximadas, siga las guías del Apéndice: *Cálculos y cifras significativas*.

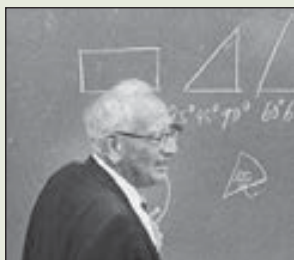
El símbolo  se usa para advertirle de no cometer un error. Hemos puesto este símbolo en el margen para señalar situaciones donde hemos encontrado que muchos de nuestros estudiantes cometen el mismo error.

cm	centímetro	mg	miligramo
dB	decibel	MHz	megahertz
F	farad	mi	milla
ft	pie	min	minuto
g	gramo	mL	mililitro
gal	galón	mm	milímetro
h	hora	N	Newton
H	Hertz	qt	cuarto
in.	pulgada	oz	onza
J	Joule	s	segundo
kcal	kilocaloría	Ω	ohm
kg	kilogramo	V	volt
km	kilómetro	W	watt
kPa	kilopascal	yd	yarda
L	litro	yr	año
lb	libra	°C	grado Celsius
lm	lumen	°F	grado Fahrenheit
M	mol e soluto por litro de solución	K	Kelvin
m	metro	\Rightarrow	implica
		\Leftrightarrow	es equivalente a

- George Polya P1
 Carta de Einstein P4
 No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto 8
 Diofanto 20
 François Viète 49
 Bhaskara 66
 Coordenadas como direcciones 84
 Pierre de Fermat 99
 Alan Turing 100
 Donald Knuth 158
 René Descartes 181
 Sonya Kovalevsky 185
 Pitágoras 219
 Evariste Galois 254
 Leonhard Euler 266
 Carl Friedrich Gauss 272
 Gerolamo Cardano 274
 El Arco de Entrada 310
 John Napier 319
 Datación de radiocarbono 333
 Espacio sólo de pie 343
 Vidas medias de elementos radiactivos 345
 Desechos radiactivos 346
 pH para algunas sustancias comunes 348
 Terremotos más fuertes 348
- Niveles de intensidad de sonidos 350
 El valor de π 383
 Funciones periódicas 394
 Radio AM y FM 395
 Raíz cuadrática media 417
 Hiparco 444
 Aristarco de Samos 446
 Tales de Mileto 447
 Levantamiento topográfico 472
 Euclides 497
 Jean Baptiste Joseph Fourier 501
 María Gaetana Agnesi 565
 Galileo Galilei 576
 William Rowan Hamilton 611
 Julia Robinson 663
 Olga Taussky-Todd 668
 Arthur Cayley 674
 David Hilbert 683
 Emmy Noether 686
 El papiro de Rhind 694
 Programación lineal 717
 Arquímedes 729
 Excentricidades de las órbitas de los planetas 738
 Trayectorias de cometas 745
 Johannes Kepler 754
 Números primos grandes 786
 Eratóstenes 787
 Fibonacci 787
- La razón de oro 791
 Srinivasa Ramanujan 802
 Blaise Pascal 818
 Triángulo de Pascal 822
 Sir Isaac Newton 852
 Newton y límites 859

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

- Las matemáticas en el mundo moderno 16
 Cambio de palabras, sonido e imágenes en número 30
 Códigos para corregir errores 38
 Computadoras 182
 Curvas paramétricas 234
 Diseño de automotores 238
 Códigos indescifrables 284
 Aplicación de la ley 318
 Evaluación de funciones en una calculadora 400
 Predicción del clima 632
 Ecología matemática 679
 Sistema de Posicionamiento Global 700
 Viendo dentro de la cabeza 759
 División equitativa de activos 796
 Figuras geométricas (fractales) 804
 Economía y matemáticas 810



GEORGE POLYA (1887-1985) es famoso entre los matemáticos por sus ideas sobre resolución de problemas. Sus conferencias sobre este tema en la Universidad de Stanford atraían a multitudes a las cuales él llevó al borde de sus asientos, conduciéndolos a descubrir las soluciones por sí mismos. Él era capaz de hacer esto debido a su profundo conocimiento de la psicología de la resolución de problemas. Su conocido libro *How to solve it* ha sido traducido a 15 idiomas. Dijo que Euler (véase la página 266) fue el único grande entre los matemáticos, porque explicó cómo encontraba sus resultados. Polya dice a menudo a sus alumnos y colegas: "Sí, veo que la demostración es correcta, pero ¿cómo lo descubrió?" En el prefacio de *How to solve it*, Polya escribe: "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero es un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Usted puede ser modesto, pero si desafía su curiosidad y pone en juego sus facultades inventivas, y si lo resuelve por sus propios medios, puede experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento."

La capacidad de resolver problemas es una habilidad muy apreciada en muchos aspectos de nuestras vidas, es sin duda una parte importante de cualquier curso de matemáticas. No hay reglas duras y rápidas que aseguren el éxito en la solución de problemas. Sin embargo, en este prólogo se proponen una serie de pasos generales en el proceso de resolución de problemas y le damos los principios que son útiles en la solución de ciertos problemas. Estas medidas y principios hacen explícito el sentido común. Se han adaptado del perspicaz libro de George Polya *How To Solve It*.

1. Entender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que usted lo entiende. Hágase las siguientes preguntas:

¿Qué es lo desconocido?

¿Cuáles son las cantidades que se señalan?

¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas, es útil

dibujar un diagrama

e identificar las cantidades que se requieren en el diagrama. Por lo general, es necesario

introducir notación adecuada

en la elección de los símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como a , b , c , m , n , x , y y , aunque en algunos casos, ayuda utilizar las iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo, para el volumen V o t para el tiempo.

2. Piense en un plan

Encuentre una conexión entre la información dada y la desconocida que le permita calcular la incógnita. A menudo es útil preguntarse a sí mismo de forma explícita: "¿Cómo puedo relacionar lo conocido y lo desconocido?" Si usted no puede ver una conexión inmediata, las siguientes ideas pueden ser útiles en la elaboración de un plan.

► Trate de reconocer algo familiar

Relacione la situación dada con los conocimientos previos. Observe la incógnita y trate de recordar un problema más familiar que tenga una incógnita similar.

► **Trate de reconocer patrones**

Ciertos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón que está ocurriendo. El patrón puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si usted puede ver la regularidad o repetición en un problema, entonces podría ser capaz de adivinar cuál es el patrón y luego probarlo.

► **Use analogías**

Trate de pensar en un problema análogo, es decir, un problema similar o relacionado, pero que es más fácil que el original. Si puede resolver el problema similar, más simple, entonces le puede dar las pistas que necesita para resolver el original, más difícil. Por ejemplo, si un problema implica un número muy grande, usted puede en primer lugar intentar resolver un problema similar con un número menor. O si el problema está en la geometría tridimensional, se podría buscar algo similar en la geometría de dos dimensiones. O si el problema inicial es de carácter general, primero se podría tratar un caso especial.

► **Introduzca algo adicional**

A veces podría ser necesario introducir algo nuevo, "una ayuda extra", para hacer la conexión entre lo conocido y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema para el cual un diagrama es útil, la ayuda podría ser una nueva línea dibujada en el diagrama. En un problema más algebraico la ayuda podría ser una nueva incógnita que se relaciona con la incógnita original.

► **Tome casos**

A veces puede tener que dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada caso. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia para hacer frente a un valor absoluto.

► **Trabaje hacia atrás**

A veces es útil imaginar que su problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Entonces usted podría ser capaz de revertir sus pasos y así construir una solución al problema original. Este procedimiento se utiliza comúnmente en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, en la solución de la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabaje hacia atrás. Sume 5 a cada lado de la ecuación y luego divida ambos lados entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada uno de estos pasos se puede revertir, ha resuelto el problema.

► **Establezca metas secundarias**

En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales (en los que la situación deseada se cumple sólo parcialmente). Si usted puede lograr o alcanzar estos objetivos parciales, entonces usted podría ser capaz de construir sobre ellos para alcanzar su meta final.

► **Razonamiento indirecto**

A veces es apropiado para atacar un problema indirectamente. En el uso de la prueba por contradicción para probar que P implica Q , se supone que P es cierta y Q es falsa y se trata de ver por qué esto no puede suceder. De alguna manera tenemos que utilizar esta información y llegar a una contradicción a lo que sabemos que es verdad absoluta.

► **La inducción matemática**

Para probar las declaraciones que implican un entero positivo n , a menudo es útil utilizar el Principio de inducción matemática, que se discute en la sección 12.5.

3. Lleve a cabo el plan

En el paso 2, se ideó un plan. Para llevar a cabo ese plan, usted debe comprobar cada etapa del plan y escribir los detalles que demuestran que cada etapa es la correcta.

4. Mire hacia atrás

Después de haber completado la solución, es conveniente mirar hacia atrás sobre ella, en parte para ver si se han cometido errores y en parte para ver si se puede descubrir una manera más fácil de resolver el problema. Mirar hacia atrás también le ayudará a familiarizarse con el método de solución, que puede ser útil para resolver un problema en el futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas."

Ilustraremos algunos de estos principios de resolución de problemas con un ejemplo.

PROBLEMA | Rapidez promedio

Una conductora se embarca en un viaje. Durante la primera mitad de la distancia, ella conduce al ritmo pausado de 30 km/h, durante la segunda mitad conduce a 60 km/h. ¿Cuál es su rapidez promedio en este viaje?

PIENSE EN EL PROBLEMA

Es tentador tomar el promedio de las rapidezces y decir que la rapidez promedio de todo el viaje es

$$\frac{30 + 60}{2} = 45 \text{ mi/h}$$

Sin embargo, ¿este enfoque simple es realmente correcto?

Veamos un caso fácil de calcular especial. Supongamos que la distancia total recorrida es de 120 millas. Los primeros 60 km se recorren a 30 km/h, lo que tarda 2 horas. Las siguientes 60 millas se viaja a 60 km/h, lo que dura una hora. Por lo tanto, el tiempo total es $2 + 1 = 3$ horas y la rapidez promedio es

$$\frac{120}{3} = 40 \text{ mi/h}$$

Por tanto, nuestra estimación de 45 mi/h estaba equivocada.

SOLUCIÓN

Entienda el problema ►

Tenemos que mirar con más cuidado en el significado de la rapidez promedio. Se define como

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Introduzca una notación ►

Sea d la distancia recorrida en cada mitad del viaje. Sean t_1 y t_2 el tiempo tomado para la primera y segunda mitad del viaje. Ahora podemos escribir la información que se nos ha dado. Para la primera mitad del viaje tenemos

$$30 = \frac{d}{t_1}$$

y para la segunda mitad tenemos

$$60 = \frac{d}{t_2}$$

Identifique la información dada ►

Identifique la incógnita ►

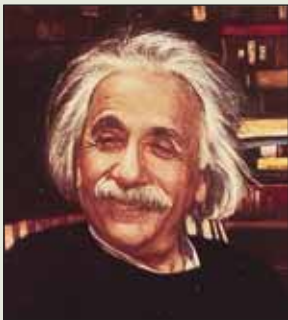
Ahora podemos identificar la cantidad que se nos pide encontrar:

$$\text{rapidez promedio del viaje completo} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$$

Relacione la información proporcionada con la incógnita ►

Para calcular esta cantidad, necesitamos conocer t_1 y t_2 , así que resolvemos las ecuaciones anteriores para estos tiempos:

$$t_1 = \frac{d}{30} \quad t_2 = \frac{d}{60}$$

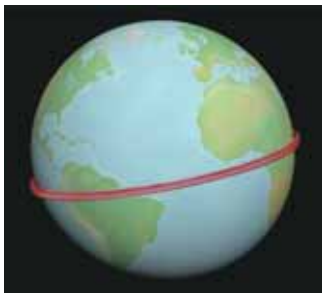


© Bettmann/CORBIS

No se sienta mal si usted no puede resolver estos problemas de inmediato. Los problemas 1 y 4 fueron enviados a Albert Einstein por su amigo Wertheimer. Einstein (y su amigo Bucky) disfrutaba de los problemas y le escribió a Wertheimer. Esta es parte de su respuesta:

Su carta nos dio un montón de pruebas divertidas. La primera prueba de inteligencia nos ha engañado a ambos (Bucky y yo). ¡Sólo trabajándolo fuera me di cuenta de que no se dispone de tiempo para la trayectoria descendente! Bucky también fue engañado en el segundo ejemplo, pero yo no. ¡Curiosidades como ésta nos muestran lo tontos que somos!

(Véase *Mathematical Intelligencer*, Primavera de 1990, página 41.)



Ahora tenemos los ingredientes necesarios para calcular la cantidad deseada:

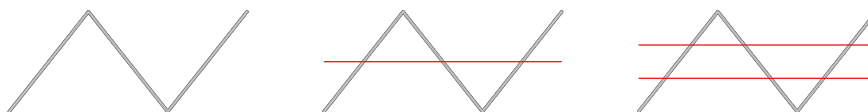
$$\begin{aligned} \text{rapidez promedio} &= \frac{2d}{t_1 + t_1} = \frac{2d}{\frac{d}{30} + \frac{d}{60}} \\ &= \frac{60(2d)}{60\left(\frac{d}{30} + \frac{d}{60}\right)} \\ &= \frac{120d}{2d + d} = \frac{120d}{3d} = 40 \end{aligned}$$

Multiplique el numerador y el denominador por 60

Por tanto, la rapidez promedio del viaje completo es 40 mi/h.

PROBLEMAS

- Distancia, tiempo y velocidad** Un automóvil viejo tiene que recorrer un camino de 2 millas, cuesta arriba y hacia abajo. Debido a que es tan viejo, el automóvil puede subir a la primera milla, de subida, no más rápido que la rapidez media de 15 km/h. ¿Qué tan rápido tiene que viajar el automóvil la segunda milla, en el descenso puede ir más rápido, por supuesto, para lograr una rapidez media de 30 km/h para el viaje?
- Comparando descuentos** ¿Cuál precio es mejor para el comprador, un descuento del 40% o dos descuentos sucesivos del 20%?
- Cortar un alambre** Se dobla un pedazo de alambre, como se muestra en la figura. Puede verse que un corte a través del cable produce cuatro piezas y dos cortes paralelos producen siete piezas. ¿Cuántas piezas se produjeron por 142 cortes paralelos? Escriba una fórmula para el número de piezas producidas por n cortes paralelos.



- Propagación de amibas** Una amiba se propaga por división simple, cada división toma 3 minutos para completarse. Cuando esa amiba se pone en un recipiente de vidrio con un fluido nutriente, el recipiente está lleno de amibas en una hora. ¿Cuánto tiempo haría falta para que el contenedor se llenara si en lugar de comenzar con una amiba, comenzamos con dos?
- Promedios de bateo** El jugador A tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para la primera mitad de la temporada de béisbol. El jugador A también tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para la segunda mitad de la temporada. ¿Es necesariamente cierto que el jugador A tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para toda la temporada?
- Café y crema** Se toma una cucharada de crema de una jarra de crema y se coloca en una taza de café. El café se agita. A continuación, una cucharada de esta mezcla se pone en la jarra de crema. ¿Hay ahora más crema en la taza de café o más café en la jarra de leche?
- Envolviendo el mundo** Una cinta se amarra fuertemente alrededor de la Tierra en el ecuador. ¿Cuánta más cinta necesita si usted ha colocado la cinta 1 pie por encima del ecuador en todas partes? (No es necesario conocer el radio de la Tierra para resolver este problema.)
- Para terminar donde empezó** Una mujer parte de un punto P sobre la superficie de la Tierra y camina 1 milla al sur, luego 1 milla al este y luego 1 milla al norte, y se encuentra de vuelta en P , el punto de partida. Describa todos los puntos P para los cuales esto es posible. [Sugerencia: Hay un número infinito de esos puntos, todos menos uno de los cuales se encuentran en la Antártida.]

Muchos problemas más y ejemplos que ponen de relieve diferentes principios de resolución de problemas están disponibles en el sitio web del libro: www.stewartmath.com. Usted puede intentarlos a medida que avanza en el libro.